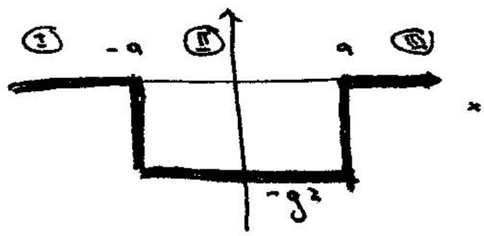
Correction c/c mécanique quantique du 08/04/2014

Version P

Ex. 1) $H\psi = E\psi$



$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$V(x) = \begin{cases} -g^2, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Notons $E = k^2$.

Région I : $-\frac{d^2}{dx^2}\psi = -k^2\psi \Rightarrow \psi = C_{I,1}e^{kx} + C_{I,2}e^{-kx}$

$\psi \to 0$ pour $x \to -\infty \Rightarrow C_{I,2} = 0 \Rightarrow \psi(x) = C_I e^{k}$

Région III : ——— " ——— $\Rightarrow \psi(x) = C_{III}e^{-kx}$

Région II : $\left(-\frac{d^2}{dx^2} - g^2\right)\psi = -k^2\psi \Rightarrow \psi = A\cos\sqrt{g^2-k^2}\,x + B\sin\sqrt{g^2-k^2}\,x$

Le potentiel est une fonction paire $\Rightarrow$ fonctions propres paires ou impaires.

Cas paire : (impaire est analogue)

$$\begin{cases} \psi_I(x) = e^{kx} \\ \psi_{II}(x) = A\cos\sqrt{g^2-k^2}\,x \\ \psi_{III}(x) = e^{-kx} \end{cases}$$

Continuité :

$e^{-ka} = A\cos\sqrt{g^2-k^2}\,a$

$ke^{-ka} = +\sqrt{g^2-k^2}\,A\sin\sqrt{g^2-k^2}\,a$

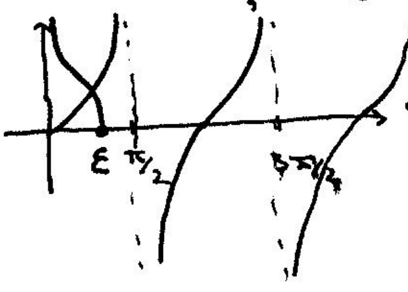
d'où $k = \sqrt{g^2-k^2}\;\mathrm{tg}\sqrt{g^2-k^2}\,a$

$\hookrightarrow$ l'équation déterminant le spectre

$$\boxed{\frac{k}{\sqrt{g^2-k^2}} = \mathrm{tg}\sqrt{g^2-k^2}\,a}$$

Introduisons $\alpha = \sqrt{g^2-k^2}\,a \Rightarrow ka = \sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}$, $\varepsilon = ga$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}}{\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha \longrightarrow$$



$\Rightarrow$ au moin
1 état li

~~Qua~~ Quand $\varepsilon \to 0$, on a
$\alpha \to 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha \Rightarrow \sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2} \approx \alpha^2$
$\Rightarrow \alpha \approx \varepsilon - \varepsilon^3/2 \Rightarrow ka \approx \varepsilon^2$.

Ex. 2 $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

$$T_L = e^{L\frac{d}{dx}} \Rightarrow (T_L\psi)(x) = \psi(x+L)$$

d'où $(H T_L \psi)(x) = H\psi(x+L) = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x+L)$

$$(T_L H \psi)(x) = T_L\left(-\psi''(x) + V(x)\psi(x)\right) =$$

$$= \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x+L)\right]\psi(x+L)$$

Comme $V(x) = V(x+L)$, on obtient $[T_L, H] = 0$.

$\hookrightarrow$ T_L et H peuvent être diagonalisés simultanément

$$T_L\psi = \lambda\psi(x) = \psi(x+L) \Rightarrow \underbrace{\psi(x+L) = \lambda\psi(x)}_{\text{fonctions propres vérifient cette relation}}$$

$$(T_L^{-1}\psi)(x) = \psi(x-L) \Rightarrow T_L^{-1} = e^{-L\frac{d}{dx}}$$

Adjoint : $\int_{-\infty}^{\infty} \bar\varphi(x)\, T_L\psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar\varphi(x)\psi(x+L)\, dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar\varphi(x-L)\,\psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{T_L^{\dagger}\varphi}\,(x)\,\psi(x)\, dx$$

d'où $T_L^{\dagger} = T_L^{-1} \Rightarrow T_L^{\dagger} T_L = \mathbb{1} \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$

et donc les valeurs propres de l'opérateur de translation se trouvent sur le cercle unitaire.

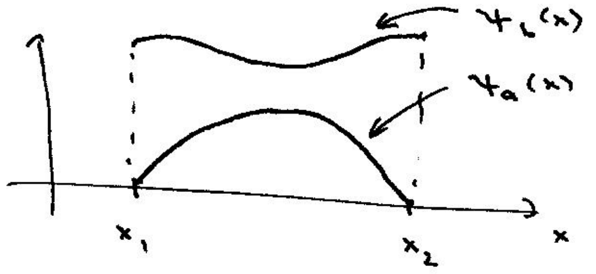
Ex. 3 $\begin{cases} -\psi_a'' + V\psi_a = E_a\psi_a \\ -\psi_b'' + V\psi_b = E_b\psi_b \end{cases}$

$$(\psi_a'\psi_b - \psi_a\psi_b')' = \psi_a''\psi_b - \psi_a\psi_b'' = (V-E_a)\psi_a\psi_b - \psi_a(V-E_b)\psi_b =$$

$$= (E_b - E_a)\psi_a\psi_b$$

Intégrons : $\int_{x_1}^{x_2} (\psi_a'\psi_b - \psi_a\psi_b')'\,dx = \left[\psi_a'\psi_b - \psi_a\psi_b'\right]_{x=x_1}^{x=x_2} =$

$$= \left[\psi_a'\psi_b\right]_{x=x_1}^{x=x_2}.$$



Supposons le contraire (voir le dessin). Alors

$$\left[\psi_a' \psi_b\right]_{x=x_1}^{x=x_2} < 0,$$

mais

$$(E_b - E_a)\int_{x_1}^{x_2} \psi_a(x)\,\psi_b(x)\,dx > 0 \Rightarrow \text{contradiction.}$$

Ex. 4 | $\langle l, m | L_z | l', m' \rangle = m' \langle l, m | l', m' \rangle = m\,\delta_{ll'}\,\delta_{mm'}$

(non-nul seulement si $l = l'$ et $m = m'$)

$\langle l, m | L_- | l', m' \rangle \sim \langle l, m | l', m'-1 \rangle = \delta_{ll'}\,\delta_{m,m'-1}$

(non-nul seulement si $l = l'$ et $m = m'-1$)

$\langle l, m | L_- | l, m+1 \rangle = \alpha$, où $L_- | l, m+1 \rangle = \alpha | l, m \rangle$

Pour calculer α:

$$\langle l, m+1 | \underbrace{L_+ L_-}_{= L^2 - L_z^2 + L_z} | l, m+1 \rangle = |\alpha|^2 \langle l, m | l, m \rangle = |\alpha|^2$$

et donc

$$|\alpha|^2 = l(l+1) - (m+1)^2 + m+1 = l(l+1) - m(m+1) =$$
$$= (l-m)(l+m+1) \Rightarrow \text{e.g. } \alpha = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}.$$

Version PC

Ex. 1 et 3 $\Rightarrow$ voir ci-dessus.

Ex. 2 | $P^2 \psi(x) = P\psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow P^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ les valeurs propres vérifient $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

2 classes des fonctions propres:

- toutes les fonctions paires ($\lambda = 1$)
- ——— " ——— impaires ($\lambda = -1$)

Le spectre est alors discret et dégénéré.

$$(HP\psi)(x) = H\psi(-x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(-x)$$

$$(PH\psi)(x) = P\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(-x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(-x)\right)\psi(-x)$$

Comme $V(x) = V(-x)$, on obtient $HP = PH \Leftrightarrow [H, P] = 0$

Donc les fonctions propres de H sont soit paires, soit impaires (car H et P peuvent être diagonalisés simultanément).